数理解析研究所講究録
323巻 1978年 139-153

Conformal metrics

東工大理
吹田信之

1．まえがき．Sario - Oikawa はその著書 "Capacity functions" においてつぎの問題を提起した；$c_\beta(z)$ を有り一ここ個 Ω の境界の容量，$K(z, \bar{\zeta})$ を Ω の Bergman 核とするとき，$c_\beta^2(z)$ と $\pi K(z, \bar{z})$ の大小を比較せよ [5]．

この問題はのちに示す c_β と K との関係式

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log c_\beta(z)$$

により，計量 $ds_\beta = c_\beta |dz|$ の曲率

$$K(ds_\beta) = -\Delta \log c_\beta(z) / c_\beta^2(z)$$

の評価の問題に帰着させられる．著者は二重連結領域について $c_\beta^2(z) \leqq \pi K(z, \bar{z})$ を示し，一般領域についても同じ不等式を予想した [6]．この予想は上のことから，$K(ds_\beta) \leqq -4$ と同値である．支持計量を利用することにより，Ω が n 個（$n > 2$）の曲線によりかこまれた領域ならば $K(ds_\beta) < -4$ をみたす点 $z \in \Omega$ は存在する。

他の等角計量についても同様な予想がある。$C_B(z)$を解析容量とし，$ds_B = C_B(z)|dz|$とするとき$K(ds_B) \leqq -4$．この予想は等号条件を除いて著者により解かれた[7,8]．さらに，リーマン面Ω上で正則かつDirichlet積分

$$\iint_\Omega |f'(z)|^2 dx\,dy$$

がπで押えられる函数族$\mathcal{D}$について

$$C_D(z) = \sup_{f \in \mathcal{D}} |f'(z)|$$

とおく．酒井氏の結果[4]を使えば，$ds_D = C_D(z)|dz|$について，$C_D(z) > 0$ならば$K(ds_D) \leqq -2$が示される。この場合も予想は$K(ds_D) \leqq -4$であり，二重連結のの場合は正しい[11]．酒井氏は最近この予想に肯定的な解答を得たとのことである[1])

Ωを平面領域とし，$\mathcal{D}$の部分族で単葉な函数族を$S\mathcal{D}$とかく．

$$C_{SD}(z) = \sup_{f \in S\mathcal{D}} |f'(z)|,$$

$ds_{SD} = C_{SD}(z)|dz|$とおけば，$C_{SD}(z) > 0$かつ微分可能な場合に$K(ds_{SD}) \leqq -4$が示される[7]．

リーマン面Ω上のBergman核は計量$ds_K = \sqrt{\pi K(z,\bar{z})}|dz|$

1) 私信

をみちびく．ds_K の曲率については，−4より大きい点も小さい点も存在することを円環の場合で示す。

2．基本等式　容量 c_β と K との関係式(1)は［6］で証明されている，ここではより簡単な別証を示す

定理 1．Ω が O_G に属しないリーマン面ならば

$$(1) \qquad K(z,\bar{z}) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log c_\beta(z)$$

証明

$$H(z,\zeta) = g(z,\zeta) + \log|z-\zeta|$$

とおく．ここに $g(z,\zeta)$ は Ω のグリーン函数，局所助変数 z，ζ を点の表示に用いた．対称性から $H(z,\zeta) = H(\zeta,z)$

さらに

$$H(z,z) = \log\frac{1}{c_\beta(z)}.$$

H（w，ω）は対称な調和函数なので w＝z，ω＝ζ のまわりでつぎのように展開される

$$H(w,\omega) = a_{00} + \cdots + a_{20}(w-z)^2$$

$$+ a_{\bar{2}0}\overline{(w-z)}^2 + a_{02}(\omega-\zeta)^2 + a_{0\bar{2}}\overline{(\omega-\zeta)}^2$$

$$+ a_{11}(w-z)(\omega-\zeta) + a_{\bar{1}\bar{1}}\overline{(w-z)}\,\overline{(\omega-\zeta)}$$

$$+ a_{1\bar{1}}(w-z)\overline{(\omega-\zeta)} + a_{\bar{1}1}\overline{(w-z)}(\omega-\zeta) + \cdots$$

ここで a_{00} は実数であり，$a_{j\bar{k}} = \overline{a_{\bar{j}k}}$ ，$a_{\bar{j}\bar{k}} = \overline{a_{jk}}$，…
明らかに

$$\left.\frac{\partial^2 H(w,\omega)}{\partial w\,\partial\overline{\omega}}\right|_{w=z,\,\omega=\zeta} = a_{1\bar{1}} = a_{1\bar{1}}(z,\zeta)$$

$$\left.\frac{\partial^2 H(w,w)}{\partial w\,\partial\overline{w}}\right|_{w=z} = a_{1\bar{1}} + a_{\bar{1}1}.$$

よく知られた等式 [2]

$$K(w,\overline{\omega}) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial\overline{\omega}}\, g(w,\omega)$$

と，$K(z,\overline{z}) = -2a_{1\bar{1}}(z,z)/\pi \geq 0$ に注意すれば，求める関係式が得られる。

3．$K(ds_B) \leqq -4$．$\Omega \in O_{AB}$ とする．解析容量 $C_B(\zeta)$ は

$$C_B(\zeta) = \sup_{|f(z)|\leqq 1} |f'(\zeta)|$$

で定義される．$f'_0(\zeta,\zeta) = C_B(\zeta)$ をみたす $f_0(z,\zeta)$ はつね

に存在し，Ahlfors 函数とよばれる．

定理2［7］．$C_B(z)>0$ かつ $C_B(z)$ が2回連続微分可能ならば $K(ds_B)\leq -4$．とくに Ω が平面領域かつ $\notin O_{AB}$ ならば，$C_B(z)$ は実解析的であり，つねに $C_B(z)>0$．

証明　支持計量の方法を用いる．Ahlfors 函数 $f_0(\zeta, z)$ をとり

$$F(\zeta, t)=\frac{f_0(\zeta,z)-f_0(t,z)}{1-\overline{f_0(t,z)}\,f_0(\zeta,z)}$$

とおく．$|F(\zeta,t)|\leq 1$ である．

$$|F'(t,t)|=\frac{|f_0'(t,z)|}{1-|f_0(t,z)|^2}=c(t)$$

点 z の近傍で，$C_B(t)\geq c(t)$ であり，$C_B(z)=c(z)$ したがって $\log(C_B(t)/c(t))$ は $t=z$ で極小値をとる．これから $t=z$ において

$$-\Delta\log C_B(z)\leq -\Delta\log c(z)$$

計算により $\Delta\log c(z)/c(z)^2=4$ だから，$K(ds_B)\leq -4$.

平面領域における $C_B(z)$ の実解析性は，$C_B(z)$ とセゲー核 $k(z,\bar{\zeta})$ との関係 $C_B(z)=2\pi k(z,\bar{z})$ ［2］から容易に示される．実際 Ω が n 個の解析曲線にかこまれた平面領域ならば，$\bar{\Omega}$ 上で正則な直交函数系 $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ をとることにより

ができて，

$$K(z,\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}$$

と展開される．収束はΩの境界上のノルム

$$\|\varphi\|^2=\int_{\partial\Omega}|\varphi|^2|dz|$$

に関して強収束であり，さらにΩ上広義一様である．これから $K(z,\bar z)$ の実解析性は明らかである．一般領域の場合は，Ωの近似 $\{\Omega_\nu\}$ を考え，対応する核函数 $K_\nu(z,\bar\zeta)$ が $\Omega\times\Omega$ 上で広義一様収束することから，実解析性が証明される．

注意．$C_B(z)$ の実解析性は，開リーマン面の場合は一般には成立しない．これは山田[10]により反例が得られている。

等号条件は異なる方法によって完全ではないが，かなりのところまで求められている[3,8]．これを示そう．

定理3．Ωは平面領域とする．ζにおけるAhlfors函数 $f_0(z,\zeta)$ が，ζ以外に零点を持てば，その点で $K(ds_B)<-4$．

証明．まずΩが有限個の解析曲線でかこまれているとき，つぎの二つの極値問題を考える．

I. $f(\zeta)=1$ のとき $\|f\|^2 = \int_{\partial\Omega}|f|^2|dz|$ を最小にする.

II. $f(\zeta)=0$, $f'(\zeta)=1$ のとき $\|f\|^2$ を最小にする.

問題Iの極値函数は $k(z,\bar\zeta)/k(\zeta,\bar\zeta)$ であって，最小値
$\lambda_0(\zeta) ≒ k(\zeta,\bar\zeta)^{-1}$
問題IIの極値函数 $F_1(z)$ は

$$F_1(z) = -\begin{vmatrix} 0 & k(z,\bar\zeta) & k_{\bar\zeta}(z,\zeta) \\ 0 & k_{00} & k_{01} \\ 1 & k_{10} & k_{11} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{vmatrix}$$

で与えられ，その最小値は，$\lambda_1(\zeta) = k_{00}/(k_{00}k_{11}-|k_{10}|^2)$
となる。ここで $k_{\alpha\beta} = (\partial^{\alpha+\beta}/\partial\zeta^\alpha\partial\bar\zeta^\beta)k(\zeta,\bar\zeta)$．さらに
曲率とこれ等極値との関係は

$$(3) \quad K(ds_B) = -\frac{\lambda_0(\zeta)^3}{\pi^2\lambda_1(\zeta)}$$

で与えられる．これ等の結果は Bergman が Bergman 核に関して導いた公式の類似物である [2]．$K(ds_B) \leqq -4$ は(3)からも示される．$\varphi(z) = f_0(z,\zeta)k(z,\bar\zeta)/2\pi k_{00}^2$ は問題IIの条件をみたしている．$\|\varphi\|^2 = (4\pi^2 k_{00}^3)^{-1} \geqq \lambda_1(\zeta)$ だから，$K(ds_B) \leqq -(\pi^2\|\varphi\|^2 k_{00}^3)^{-1} = -4$.

等号条件をしらべるため，$f_0(z,\zeta)$はζ以外の零点ζ_0をも

つものとする．$k(z,\bar{\zeta})$ の共役核を $l(z,\zeta)$ とかく．$l(z,\zeta)$ は $z=\zeta$ に留数 1 の極を持ち，z，ζ に関して対称，かつ境界に沿って

$$(4) \qquad l(z,\zeta)\,|dz| = i\,\overline{k(z,\bar{\zeta})\,dz}$$

が成立する．さらに $l(z,\zeta)$ は Ω 内に零点をもたないことが知られている［2］

さて，

$$h(z) = (z-\zeta)\,l(z,\zeta_0)\,f_0(z,\zeta)$$

とおく．$h(z)$ と $\varphi(z)$ の内積を計算する．(4) を使って，

$$(h,\varphi) = \int_{\partial\Omega} h\,\overline{\frac{f_0(z,\zeta)\,k(z,\zeta)}{2\pi k_{00}^2}}\,|dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi k_{00}^2 i}\int_{\partial\Omega} (z-\zeta)\,l(z,\zeta_0)\,l(z,\zeta)\,dz = \frac{(\zeta-\zeta_0)}{i k_{00}^2}\,l(\zeta_0,\zeta).$$

$\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z) + \varepsilon h(z)$ は問題 II の条件をみたしている．

$\|\varphi_\varepsilon\|^2$ の最小値は，$\varepsilon = -|(h,\varphi)|\,\|h\|^{-2}\exp(-i\arg(h,\varphi))$ のときとられ，その値は

$$\|\varphi\|^2 - \frac{|(h,\varphi)|^2}{\|h\|^2}$$

に等しい．このことは $K(ds_B) < -4$ を示す．

Ωが平面一般領域の場合，$\infty \in \Omega$としても一般性を失わない．Ωの近似を$\{\Omega_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$とし，各$\Omega_\nu$におけるAhlfors函数を$f_\nu(z,\zeta)$とかく．$f_\nu \to f_0$（広義一様）だから$f_0(z,\zeta)$の零点$\zeta_0$は，$f_\nu(z,\zeta)$の零点$\zeta_\nu$の集積値である．補助の等角写像を利用すればよいから$\zeta \neq \infty$と仮定する．Ω_νにおけるφ，hに対応する函数をφ_ν，h_νとかく．Ω_νにおけるセゲーおよび共役核を$k^{(\nu)}(z,\zeta)$，$l^{(\nu)}(z,\zeta)$として，$\nu \to \infty$のとき

$$\left|(h_\nu,\varphi_\nu)\right| = \left|\frac{(\zeta-\zeta_\nu)}{k_{00}^{(\nu)2}}\, l^{(\nu)}(\zeta_\nu,\zeta)\right| \to \left|\frac{\zeta-\zeta_0}{k_{00}^{2}}\, l(\zeta_0,\zeta)\right|$$

だから$\left|(h_\nu,\varphi_\nu)\right|$は正の下限を有する．さらに，(4)より

$$\|h_\nu\|^2 = \int_{\partial\Omega_\nu} |z-\zeta|^2 \left|l^{(\nu)}(z,\zeta_\nu)\right|^2 |dz|$$

$$= \int_{\partial\Omega_\nu} |z-\zeta|^2 \left|k^{(\nu)}(z,\zeta_\nu)\right|^2 |dz|$$

$z \in \Omega_\nu$のとき，$|z-\zeta| \leqq M$としてよいから，再生性より

$$\|h_\nu\|^2 \leqq M^2 k^{(\nu)}(\zeta_\nu,\zeta_\nu) \to M^2 k(\zeta_0,\zeta_0) \quad (\nu\to\infty)$$

$\|h_\nu\|^2$が一様有界だから$\left|(h_\nu,\varphi_\nu)\right|/\|h_\nu\|^2$も正の下限を持つ．このことから$\zeta$において$K(ds_B) < -4$．

4．その他の等角計量．$\Omega \notin O_{AD}$とする．$\mathcal{D} = \{f \mid$

$\iint |f'|^2 dxdy \leqq \pi$ について，$\sup|f'(\zeta)|$，$f \in \mathfrak{D}$ を $C_D(\zeta)$ とおく．$g'(\zeta) = C_D(\zeta)$ をみたす g が $\mathfrak{D}$ に存在する．$C_D(\zeta) > 0$ ならば $g(z)$ は附加定数を除いて唯一つ定まる．とくに $g(\zeta) = 0$ とみたす函数を AD 極値函数とよび $f_1(z, \zeta)$ とかく．酒井氏によればつねに $|f_1(z,\zeta)| \leqq 1$ [4]．$ds_D = C_D(z)|dz|$ として，この結果をつかえば，

定理4．$\Omega \in O_{AD}$，$C_D(z) > 0$ ならば，$K(ds_D) \leqq -2$．

証明，Ω 上の exact な微分のつくる Hilbert 空間の Bergman 核を $\bar{K}(z, \bar{\zeta})$ とかく．f_1 は

$$f_1(z, \zeta) = \int_{\zeta}^{z} \frac{\sqrt{\pi}\ \bar{K}(z, \bar{\zeta})}{\sqrt{\bar{K}(\zeta, \bar{\zeta})}}\, dz$$

であたえられる [1]．$C_D(\zeta) = \sqrt{\pi \bar{K}(\zeta, \bar{\zeta})}$．$\bar{K}(\zeta, \bar{\zeta})$ は直交函数による展開を持つから，$\bar{K}(\zeta, \bar{\zeta})$ は実解析的である

この場合は　定理3′の証明でものべた Bergman の方法 [2] を使うことができる．

問題 I′　$f'(\zeta) = 1$ のとき $\iint_{\Omega} |f'|^2 dxdy = \|f'\|^2$ を最小にする．最小値を $\lambda_0^*(\zeta)$ とおく

問題 II′　$f'(\zeta) = 0$，$f''(\zeta) = 1$ のとき $\|f'\|^2$ を最小にする．最小値を $\lambda_1^*(\zeta)$ とおく．

$$(5)\quad K(ds_D) = -\frac{2}{\pi}\frac{\lambda_0^*(\zeta)^2}{\lambda_1^*(\zeta)}.$$

問題I′の極値函数は

$$F_0(z) = \int_\zeta^z \frac{K(z,\bar\zeta)}{K(\zeta,\bar\zeta)}\,dz$$

で与えられ，$\lambda_0^*(\zeta) = K(\zeta,\bar\zeta)^{-1}$．問題II′の条件をみたす函数として，

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}F_0(z)^2$$

をとる．　$F_0 = f_1(z,\zeta)/\sqrt{\pi K(\zeta,\bar\zeta)}$，$|f_1| \leqq 1$ だから，

$$|\varphi'| \leqq \left|\frac{f_1'(z,\zeta)}{\pi K(\zeta,\bar\zeta)}\right|$$

すなわち

$$\lambda_1^*(\zeta) \leqq \|\varphi'\|^2 \leqq \left(\pi K(\zeta,\bar\zeta)^2\right)^{-1}$$

(5) より　$K(ds_D) \leqq -2$ をうる．

Ω を平面領域とし，$ds_{SD} = c_{SD}(z)|dz|$ を考える．Ω 内で単葉正則かつ $|f(z)| \leqq 1$ をみたす函数族を SB とかき，$c_{SB}(\zeta) = \sup|f'(\zeta)|$，$f \in SB$ とおく．$c_{SD}(\zeta) = c_{SB}(\zeta)$ となることが知られている［1］．したがって，$c_{SD}(z)$ が2回微分可能な点では定理2の証明がそのまま使うことができて，$K(ds_{SD}) \leqq -4$ となる．しかし，複連

結領域の場合は $C_{SD}(z)$ は必らずしも微分可能ではない．例として円環 $\Delta: R^{-1}<|z|<R\ (R>1)$ をとる．$R^{-1}<x<R$ とする．$C_{SD}(x)$ を与える極値函数 $p(z)$ は $p(x)=0$ をみたし，Δ を半径1の円从截線円板へ写像する．$p(z)$ は Δ のグリーン函数 $g(z,x)$ を用いてつぎのように表わされる．

$$\log|p(z)| = -g(z,x) - \begin{cases} \dfrac{\log Rx \log R|z|}{2\log R} & (R^{-1}<x\leq 1) \\ \dfrac{\log(x/R)\log |z|/R}{2\log R} & (1\leq x<R) \end{cases}$$

これから

$$(6)\quad \log C_{SD}(x) = \log C_\beta(x) - \begin{cases} \dfrac{(\log Rx)^2}{2\log R} & (R^{-1}<x\leq 1) \\ \dfrac{(\log x/R)^2}{2\log R} & (1\leq x<R) \end{cases}$$

Δ は回転に対して不変であるから，$C_{SD}(z)=C_{SD}(|z|)$
(6) より $\log C_{SD}(z)$ は $|z|=1$ において微分可能でない．

最後に Ω の Bergman 核 $K(z,\zeta)$ に対し計量 $ds_K=\sqrt{\pi K(z,\bar z)}|dz|$ を考える．ds_K の曲率 $\kappa(ds_K)$ は円環の場合でも -4 より小さい点も大きい点も存在する（単連結領域の場合は $\kappa(ds_K)=-4$）．上記の円環 Δ について示す．Δ の普遍被覆面を右半平面 Π へ写す．このとき

$$w = \exp\left(\frac{\log z}{2\log R}\pi i\right), \quad \mathrm{Re}\, w > 0.$$

Δのグリーン函数はΠにおいて

$$g(W, w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \log\left|\frac{W+\overline{w_\nu}}{W-w_\nu}\right|,$$

と表わされる[9]. ここに$w_0 = w$, $w_\nu = e^{\frac{-\pi^2}{\log R}} w_{\nu-1}$.

これから

$$C_\beta(w) = \frac{1}{2\,\mathrm{Re}\,w} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left|\frac{w-w_\nu}{w+\overline{w_\nu}}\right|.$$

Π'は添数0を除った積を表わす. 等式(1)を用いて計算すると,

$$\pi K(w, \overline{w}) = \frac{1}{4(\mathrm{Re}\,w)^2} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\overline{w_\nu'}}{(w+\overline{w_\nu})^2}.$$

Σ'は0を除った和を表わす. $-R < z < R$のとき,

$w = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $a = e^{-\frac{\pi^2}{\log R}}$ とおいて

$$\pi K(w, \overline{w}) = \frac{1}{4\cos^2\theta} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a^\nu((1+a^{2\nu})\cos 2\theta + 2a^\nu)}{(1+2a^\nu\cos 2\theta + a^{2\nu})}$$

さらにΔのポアンカレ計量を$\rho(w)|dw|$とかけば

$$\rho(w) = \frac{1}{2\cos\theta}$$

ρ^2とπKを比較する。$2a^\nu/(1+a^{2\nu})$はνが± 1のとき最大

だから，$\cos 2\theta \leqq -2a/(1+a^2)$ となる w については $\pi K(w,\bar{w})$ の第2項は負となる．また $|\theta| \leqq \frac{\pi}{4}$ のときはその項は正．よってそれぞれの場合に応じて $\pi K \leqq \rho^2$，$\pi K \geqq \rho^2$．

$$H(w) = \log \frac{\pi K(w,\bar{w})}{\rho^2(w)} \longrightarrow 0 \qquad (w \to iy)$$

だから，$H(w)$ は最大値および最小値を Π の内点 w_0 および w_1 でとる．それ等の点では $\Delta H \leqq 0$，および $\Delta H \geqq 0$ だから，最大値をとる点では

$$-\Delta \log\sqrt{K(w_0,\bar{w}_0)} \geqq -\Delta \log \rho(w_0)$$

$\pi K(w_0,\bar{w}_0) > \rho(w_0)$ より

$$\frac{-\Delta \log\sqrt{K(w_0,\bar{w}_0)}}{\pi K(w_0,\bar{w}_0)} > -\frac{\Delta \log \rho(w_0)}{\rho(w_0)^2} = -4.$$

同様にして w_1 において，$\kappa(ds_K) < -4$．

さらに，O_G の場合であるが，種数1の閉リーマン面については，$\kappa(ds_K) \equiv 0$ となることが容易にわかる．したがって Bergman 計量 ds_K の曲率のすべてのリーマン面に関する上限は0である．

REFERNCES

[1] Ahlfors, L. V., and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. 83 (1950), 109-129.

[2] Bergman, S. The kernel function and conformal mapping. Math. Surveys 5, Amer. Math. Soc. Prov. R. I. (1950).

[3] Burbea, J. The Carathéodory metric in plane domains. Kōdai Math. Sem. Rep. 29 (1977), 157-166.

[4] Sakai, M. Analytic functions with finite Dirichlet integrals. To appear.

[5] Sario, L., and Oikawa, K. Capacity functions. Springer-Verlag 1969.

[6] Suita, N. Capacities and kernels on Riemann surfaces. Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972), 212-217.

[7] _____ On a metric induced by analytic capacity. Kōdai Math. Sem. Rep. 25 (1973), 215-218.

[8] _____ On a metric induced by analytic capacity II. Ibid. 27 (1976), 159-162.

[9] Tsuji, M. Potential theory in modern function theory. Maruzen 1959.

[10] Yamada, A. On the linear transformations of Ahlfors functions. To appear.

[11] Zarankiewicz, K. Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. Z. Angew. Math. Mech. 14 (1934) 97-104.